卒業論文要旨

中心多様体理論を用いた 高速特異値計算アルゴリズム mdLVs の局所解析

(知能情報システム学)　　高橋 悠

1. はじめに

上 2 重対角行列 B の特異値を求めるアルゴリズムの 1 つとして dLV アルゴリズムがある．ここで，B の特異値とは B^tB がもつ固有値の正の平方根である．ただし，B^t は B の転置行列とする．dLV アルゴリズムは離散ロトカ・ボルテラ (dLV: discrete Lotka-Volterra) 系

$$u_k^{(n+1)}(1+\delta u_{k-1}^{(n+1)}) = u_k^{(n)}(1+\delta u_{k+1}^{(n)}), \quad k=1,2,\ldots,m, \quad n=0,1,\ldots \tag{1}$$

がもつ数理構造に着目して定式化されたアルゴリズムである．dLV 系は元来，生物数理モデルとして知られたロトカ・ボルテラ系の時間離散版であり，上付き添字 n は離散時間，下付き添字 k は生物の固体番号，$u_k^{(n)}$ は離散時間 n における個体番号 k の生物の個体数を表す．

原点シフトを加えた dLV アルゴリズムの高速版として mdLVs アルゴリズム [2] が定式化されている．mdLVs アルゴリズムの核をなす漸化式は以下の通りである．

$$w_k^{(n)} = u_k^{(n)}(1+\delta u_{k-1}^{(n)}), \tag{2}$$

$$v_k^{(n)} = u_k^{(n)}(1+\delta u_{k+1}^{(n)}), \tag{3}$$

$$w_{2k-2}^{(n+1)} + w_{2k-1}^{(n+1)} = v_{2k-2}^{(n)} + v_{2k-1}^{(n)} - \theta^{(n)^2}, \tag{4}$$

$$w_{2k-1}^{(n+1)} w_{2k}^{(n+1)} = v_{2k-1}^{(n)} v_{2k}^{(n)}. \tag{5}$$

ここで，δ は正の任意パラメータ，$\theta^{(n)^2}$ はシフト量である．B の成分をもとに $w_k^{(0)}$ を定め，$w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, \cdots, w_k^{(n)}, \cdots$ が逐次的に求められる．$n \to \infty$ において $w_{2k-1}^{(n)} + \sum_{n=0}^{n-1} \theta^{(n)^2} I$ は，B の特異値の 2 乗に収束し，また $w_{2k-1}^{(n)}$ は $c_1 > c_3 > \cdots > c_{2m-1}$ なる正の定数 c_{2k-1} に収束する．すべての n に対してシフト量 $\theta^{(n)^2} = 0$ とすると，mdLVs アルゴリズムは dLV アルゴリズムと等価になる．[3] では，dLV アルゴリズムは局所的に指数安定であることが中心多様体理論を用いて示されている．ところが，mdLVs アルゴリズムに対する局所解析は報告されていない．本研究では，Rutishauser シフトを行う mdLVs アルゴリズムに対する中心多様体の存在を明らかにし，mdLVs アルゴリズムの漸近挙動を調べる．

2. mdLVs アルゴリズムに対する中心多様体

mdLVs アルゴリズムのシフト量として，

$$\theta^{(n)2} = \frac{1}{2} w_{2m-1}^{(n)} - \frac{1}{4} w_{2m-2}^{(n)} \tag{6}$$

を考える．シフト量 (6) はシフト付き qd アルゴリズムに対する Rutishauser の考察 [4] に起因するもので，n が十分大きいときは Rutishauser シフトとみなしてよい．(2), (3) および (6) を使って，(4), (5) を $u_k^{(n)}$ のみで書き表し整理すると次式が導かれる．

$$u_{2k}^{(n+1)} = \beta_k u_{2k}^{(n)} + g_k^{(n)}. \tag{7}$$

ただし，$\beta_k := (1+\delta c_{2k+1})/(1+\delta c_{2k-1}) < 1$ である．さらに，$\bar{u}_{2k-1}^{(n)} := u_{2k-1}^{(n)} + c_{2k-1}$ を使って (4) を書き換え，適切な変数を導入すると次の定理が得られる．

定理 1　$P^{(n)}_{2k-1}, Q^{(n)}_{2k-1}$ を

$$P^{(n)}_{2k-1} := \bar{u}^{(n)}_{2k-1} + \sum_{j=0}^{1}(-1)^{(j+1)}\frac{c_{2k-1}(1+\delta c_{2k-1})}{c_{2(k+j)-3} - c_{2(k+j)-1}}u^{(n)}_{2(k+j)-2} - \bar{u}^{(n)}_{2m-1}, \tag{8}$$

$$Q^{(n)}_{2m-1} := \bar{u}^{(n)}_{2m-1} - \frac{(1+\delta c_{2m-3})^2}{2(1-\delta c_{2m-3})}u^{(n)}_{2m-2} \tag{9}$$

と定義する．ここで，$\max_k |u^{(n+1)}_{2k-1} + c_{2k-1}| < \delta^{-1}, \max_k |u^{(n+1)}_{2k}| < \delta^{-1}$ とする．そのとき，

$$P^{(n+1)}_{2k-1} = P^{(n)}_{2k-1} + f^{(n)}_k, \;\; u^{(n+1)}_{2k} = \beta_k u^{(n)}_{2k} + g^{(n)}_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{10}$$

$$Q^{(n+1)}_{2m-1} = \frac{1}{2}Q^{(n)}_{2m-1} + h^{(n)}_k \tag{11}$$

が成立する．ただし，$f^{(n)}_k, g^{(n)}_k, h^{(n)}_k$ は $\bar{u}^{(n)}_{2k-1}, u^{(n)}_{2k}$ に関する 2 次以上の項からなる多項式であり，その 1 階導関数は原点付近で 0 となる．

mdLVs アルゴリズムに関連した中心多様体の存在が明らかになり，mdLVs アルゴリズムの局所的な挙動について次の定理が導かれる．

定理 2　mdLVs アルゴリズムの核となる漸化式において，$u^{(n^*)}_{2k-1} - c_{2k-1}$ および $u^{(n^*)}_{2k}$ が十分小さく，$\max_k |u^{(n+1)}_{2k-1} + c_{2k-1}| < \delta^{-1}, \max_k |u^{(n+1)}_{2k}| < \delta^{-1}$ のとき，$n \geq n^*$ なる n が大きくなるにつれて $u^{(n)}_{2k}$ は単調に 0 に収束する．つまり，正の定数 ρ, ε $(\varepsilon < 1)$ に対して，

$$|u^{(n)}_{2k}| < \rho\varepsilon^n. \tag{12}$$

変数 $u^{(n)}_{2k}$ が 0 に近づくほど高精度な特異値が得られるという既知の事実と定理 2 とを合わせれば，Rutishauser シフトを行う mdLVs アルゴリズムでは n がある有限の n^* 以降，求まる特異値の精度を単調に向上させることができると結論付けられる．

3. まとめ

Rutishauser シフトを行う mdLVs アルゴリズムの核となる漸化式に関して，中心多様体の存在を定理 1 に示した．また，Rutishauser シフトを行う mdLVs アルゴリズムの局所的な挙動を，中心多様体理論を用いて定理 2 にまとめた．

今後は，mdLVs アルゴリズムに対して Rutishauser 以外のシフト戦略を行った場合や mdLVs アルゴリズム以外のシフト付きアルゴリズムについても，中心多様体理論による局所解析を検討したい．

参考文献

[1] Carr, J.: *Apprication of Center manidold Theory,* Springer-Verlag, New York, 1981

[2] Iwasaki M. and Nakamura Y.: Accurate computation of singular value in terms of shifted integrable schemes, *Japan J. Indust. Appl. Math.,* **23** (2006), pp.239–259

[3] Iwasaki M. and Nakamura Y.: Center manififold approach to discrete integrable systems related to eigenvalues and singular values, *Hokkaido Math.* J., **36** (2007), pp.759–775

[4] Rutishauser H.: *Lecture on Numerical Mathematics,* Birkhäuser, Boston, 1981