卒業論文要旨

拡張型フィボナッチ列を保存する離散ロトカ・ボルテラ系について

(応用数学)　赤岩 香苗

1. はじめに

捕食関係を記述する生物数理モデルの 1 つとして可積分なロトカ・ボルテラ (LV) 系がある [4]．LV 系の時間変数を離散化すると，離散ロトカ・ボルテラ (dLV: discrete Lotka-Volterra) 系

$$u_k^{(n+1)}(1+\delta u_{k-1}^{(n+1)}) = u_k^{(n)}(1+\delta u_{k+1}^{(n)}), \quad k=1,2,\ldots,2m-1, \tag{1}$$
$$u_0^{(n)} := 0, \quad u_{2m}^{(n)} := 0, \quad n=0,1,\ldots$$

が得られる [1, 2]．ここで，δ は正の離散化パラメータ，k は生物個体番号，n は離散時間であり，$u_k^{(n)}$ は離散時間 n における生物個体番号 k の個体数を表す．k 番目の生物種に対して，$(k-1)$ 番目の生物種を捕食者，$(k+1)$ 番目の生物種を被食者としている．dLV 系 (1) の解については以下のように Hankel 行列式を使って表現できる [1, 2].

$$u_{2k-1}^{(n)} = \frac{\hat{H}_k^{(n)} H_{k-1}^{(n+1)}}{H_k^{(n)} \hat{H}_{k-1}^{(n+1)}}, \quad u_{2k}^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)} \hat{H}_{k-1}^{(n+1)}}{\hat{H}_k^{(n)} H_k^{(n+1)}}, \tag{2}$$

$$H_k^{(n)} := \begin{vmatrix} a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & \cdots & a_{k-1}^{(n)} \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \cdots & a_k^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1}^{(n)} & a_k^{(n)} & \cdots & a_{2k-2}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad \hat{H}_k^{(n)} := \begin{vmatrix} a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \cdots & a_k^{(n)} \\ a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \cdots & a_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^{(n)} & a_{k+1}^{(n)} & \cdots & a_{2k-1}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$H_0^{(n)} := 1, \quad H_{m+1}^{(n)} := 0, \quad \hat{H}_0^{(n)} := 1. \tag{4}$$

Hankel 行列式 (3) に含まれる任意関数 $a_j^{(n)}$ は，分散関係式

$$a_j^{(n+1)} = a_j^{(n)} + \delta a_{j+1}^{(n)}, \quad j=0,1,\ldots,2m-2 \tag{5}$$

を満たす．分散関係式 (5) によって任意関数 $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_{2m-2}^{(n)}$ の時間発展 $n \to n+1$ は得られるが，$a_{2m-1}^{(n)}$ の時間発展 $n \to n+1$ は定義されないことに注意されたい．

本研究では，まず dLV 系 (1) の Hankel 行列式解 (2) に対して，$n=0$ における $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列ならば，すべての n における $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ もまた拡張型フィボナッチ列をなすことを示す．続いて，$n \to \infty$ のとき，dLV 変数の 1 つが離散化パラメータ δ を係数に含む代数方程式の実数解に収束することも明らかにする．

2. 拡張型フィボナッチ列保存と dLV 変数の収束性

数列 $\{F_j\}_{j=0,1,\ldots}$ がフィボナッチ列 [3] をなすとき，漸化式

$$F_{j+2} = F_j + F_{j+1}, \quad j=0,1,\ldots \tag{6}$$

が成り立つ．ここで，Hankel 行列式 (3) の成分 $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_{2m-1}^{(n)}$ が以下の漸化式を満たすとする．$m=2\ell$, $\ell=1,2,\ldots$ (m が偶数) のとき，

$$a_{j+2\ell}^{(n)} = \beta_1(a_j^{(n)} + \delta a_{j+1}^{(n)}) + \beta_2(a_{j+2}^{(n)} + \delta a_{j+3}^{(n)}) + \cdots$$
$$+ \beta_\ell(a_{j+2\ell-2}^{(n)} + \delta a_{j+2\ell-1}^{(n)}), \quad j=0,1,\ldots,2\ell-1, \tag{7}$$

$m=2\ell+1$, $\ell=1,2,\ldots$ (m が奇数) のとき，

$$a_{j+2\ell+1}^{(n)} = \beta_1(a_j^{(n)} + \delta a_{j+1}^{(n)}) + \beta_2(a_{j+2}^{(n)} + \delta a_{j+3}^{(n)}) + \cdots$$
$$+ \beta_\ell(a_{j+2\ell-2}^{(n)} + \delta a_{j+2\ell-1}^{(n)}) + \beta_{\ell+1} a_{j+2\ell}^{(n)}, \quad j=0,1,\ldots,2\ell. \tag{8}$$

ただし，δ は dLV 系 (1) の離散化パラメータであり，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\ell+1}$ は非ゼロの任意定数とする．特に $m = 2, \delta = \beta_1 = 1$ のとき数列 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,2,3}$ はフィボナッチ列となるので，$\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ を拡張型フィボナッチ列と呼ぶことにする．

本研究では，ある離散時間nにおいて $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列ならば，$\{a_j^{(n+1)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ も拡張型フィボナッチ列となることを示した．この性質は $n = 0, 1, \ldots$ に対して再帰的に成り立つので，以下の定理が得られる．

定理 1 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ は $H_m^{(0)} \neq 0$ を満たす拡張型フィボナッチ列とする．このとき，すべての n に対して $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ もまた拡張型フィボナッチ列となる．

$j \to \infty$ のとき，フィボナッチ数の比 F_{j+1}/F_j が黄金比 $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ に収束することは有名である．黄金比 τ はまた，2 次の代数方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{9}$$

の実数解と等しいことも知られている [3]．定理 1 を利用すると，dLV 変数 $u_1^{(n)} = a_1^{(n)}/a_0^{(n)}$ の $n \to \infty$ における漸近挙動について，以下の定理が導かれる．

定理 2 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ は $H_m^{(0)} \neq 0$ を満たす拡張型フィボナッチ列とする．このとき，$n \to \infty$ において，dLV 変数 $u_1^{(n)}$ は以下に示す m 次の代数方程式の実数解に収束する．

$$x^2 - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \qquad (m = 2), \tag{10}$$

$$x^3 - \beta_2 x^2 - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \qquad (m = 3), \tag{11}$$

$$x^4 - \beta_2(\delta x^3 + x^2) - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \qquad (m = 4), \tag{12}$$

$$x^5 - \beta_3 x^4 - \beta_2(\delta x^3 + x^2) - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \qquad (m = 5). \tag{13}$$

特に $m = 2, \delta = 1, \beta_1 = 1$ ならば，$n \to \infty$ において $u_1^{(n)}$ は (9) の実数解 τ に収束する．

3. まとめと今後の課題

本研究では，dLV 系 (1) の Hankel 行列式解 (2) において，$n = 0$ のときの数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列ならば，任意の n に対して $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\ldots,2m-1}$ もまた拡張型フィボナッチ列となることを示した．$m = 2, 3, 4, 5$ の場合，$n \to \infty$ において dLV 変数 $u_1^{(n)}$ が代数方程式の実数解に収束することも明らかにした．

今後は，dLV 変数の収束性について，$m = 2, 3, 4, 5$ の場合だけでなく任意の m の場合について議論する．また，dLV 系 (1) と関連する新たな数列を見出し，dLV 変数の $n \to \infty$ における収束値がどのような代数方程式の解になるのか調べたい．

参考文献

[1] R. Hirota and S. Tsujimoto, Conserved quantities of a class of nonlinear difference equations, *J. Phys. Soc. Jpn*, **64** (1995), 3125–3127.

[2] S. Tsujimoto, Y. Nakamura and M. Iwasaki, The discrete Lotka-Volterra system computes singular values, *Inverse Problems*, **17** (2001), 53–58.

[3] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section – theory and Applications* –, Dover, New York, 2008.

[4] S. Yamazaki, On the system of non-linear differential equations $\dot{y}_k = y_k(y_{k+1} - y_{k-1})$, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20** (1987), 6237–6241.