卒業論文要旨

連立 1 次方程式に対する Stride Reduciton の一般化

(応用数学)　波田 正嗣

1 はじめに

連立 1 次方程式の求解は，信号処理，線形計画問題，線形近似をはじめ，理工学の様々な分野で必要とされる重要な線形代数の問題の 1 つである．特に，線形計画問題の最適値を求める問題は，生産計画，原料購入計画，人員配置，輸送計画，在庫計画，スケジューリング，資産運用，エネルギー計画，サプライチェーン最適化等，その応用範囲は多岐にわたる．m 個の未知変数 $x_1,\dots,x_m$ に対する n 元連立 1 次方程式は

$$Ax = y,$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in C^{m\times n}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in C^m, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in C^n.$$

と表され，係数行列 A および右辺ベクトル y は一般的に既知である．連立 1 次方程式の求解とは未知ベクトル x を求めることであり，x は連立 1 次方程式の解と呼ばれる．解 x を得るための解法は概ね直接法と反復法に分類される．直接法は有限回の演算で解が求まる方法であり，クラメール法，LU 分解法，ガウス・ジョルダン法が有名である．演算が誤差なしで実行できれば数学的に厳密な解が得られるが，現状の計算機では極めて困難である．反復法は適当に選んだ初期値から反復計算により解に近づけていく方法であり，ヤコビ法，ガウス・ザイデル法，SOR 法，クリロフ部分空間法等が挙げられる．直接法よりも誤差に対して頑強だが係数行列 A の性質によって収束しないことも珍しくない．標準的な解法に加えて，係数行列 A が特徴的な構造をもつ場合の解法もある．係数行列 A が 3 重対角行列，つまり，A の i 行目が

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & (i-1)\text{ 列} & i\text{ 列} & (i+1)\text{ 列} & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

となる場合に限れば，例えば Stride Reduciton (SR) [1] を有限回繰り返して連立 1 次方程式 $Ax = y$ を解くことができる．連立 1 次方程式 $Ax = y$ に対して SR 法を 1 回施すと，$A^{(\ell)}x = y^{(\ell)}$ と変形され，$A^{(\ell)}$ の i 行目は次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & (i-\ell)\text{ 列} & & & & i\text{ 列} & & & & (i+\ell)\text{ 列} & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_i^{(\ell)} & 0 & \dots & 0 & b_i^{(\ell)} & 0 & \dots & 0 & c_i^{(\ell)} & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

変形された係数行列 $A^{(\ell)}$ と右辺ベクトル $y^{(\ell)}$ の成分は，もとの連立 1 次方程式 $Ax = y$ からどのように与えられるか等の詳細については [1] を参照されたい．現状では $\ell = 2,3,4$ の場合の SR は既知だが，$\ell = 5,6,\dots$ の場合の SR については報告されていない．

本研究では，ℓ を自由に決定できるように SR を一般化し，一般化された SR の繰り返しによって連立 1 次方程式の係数行列を対角化して解を算出できることを明らかにする．一般化された SR は連立 1 次方程式に対する有用な数値技法であることも，数値実験を通じて確認する．

2 $k\tau$ Stride Reduction

係数行列 $A^{(\ell)}$ の項 $a^{(\ell)}, b^{(\ell)}, c^{(\ell)}$ が残る範囲で ℓ を拡張した $\tau = 1,2,\dots,n-1$ に置き換え，連立 1 次方程式を $A^{(\tau)}x = y^{(\tau)}$ とする．$k\tau$SR 法は連立 1 次方程式 $A^{(\tau)}x = y^{(\tau)}$ に対して $k\tau$SR 法を施し，任

意の 2 以上の整数 k で，$k\tau < n$ の範囲において，連立 1 次方程式 $A^{(\tau)}x = y^{(\tau)}$ の τ を k 倍すると，$A^{(k\tau)}x = y^{(k\tau)}$ と変換できる方法である．連立 1 次方程式が $A^{(1)}x = y^{(1)}$ のとき，$A^{(1)}$ の i 行目は次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & (i-1)\text{ 列} & i\text{ 列} & (i+1)\text{ 列} & & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_i^{(1)} & b_i^{(1)} & c_i^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \end{array}$$

$k\tau$SR 法を $A^{(1)}x = y^{(1)}$ に対して $k = 3$ で施すと，$A^{(3)}x = y^{(3)}$ と変形でき，$A^{(3)}$ の i 行目は次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & (i-3)\text{ 列} & & & i\text{ 列} & & & (i+3)\text{ 列} & & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_i^{(3)} & 0 & 0 & b_i^{(3)} & 0 & 0 & c_i^{(3)} & 0 & \ldots & 0 \end{array}$$

さらに，$k\tau$SR 法を $A^{(3)}x = y^{(3)}$ に対して $k = 2$ で施すと，$A^{(6)}x = y^{(6)}$ と変形でき，$A^{(6)}$ の i 行目は次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & & & (i-6)\text{ 列} & & & \ldots & & & i\text{ 列} & & & \ldots & & & (i+6)\text{ 列} & & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_i^{(6)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_i^{(6)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_i^{(6)} & 0 & \ldots & 0 \end{array}$$

また，$k\tau$SR 法を $k = 6$ で $A^{(1)}x = y^{(1)}$ に対して施しても $A^{(6)}x = y^{(6)}$ に変形できる．同じ $A^{(6)}$ でも変形の仕方が幾つもある．$A^{(k\tau)}x = y^{(k\tau)}$ への変形パターンが幾つもあることから，解の算出パターンは膨大にある．連立 1 次方程式 $A^{(\tau)}x = y^{(\tau)}$ に対して $k\tau \geq n$ の条件で行う $k\tau$SR 法は $k\tau$ が式の数 n を超えているので計算された $A^{(k\tau)}$ は対角成分しか残らないので対角行列になる．$k\tau$SR 法の詳しい計算方法は，卒論発表でふれたい．

3　数値実験結果

計算機環境は，Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU 3.33GHz，RAM 4.00GB として係数行列 A が 3 重対角行列である連立 1 次方程式 $Ax = y$ と同形の $A^{(1)}x = y^{(1)}$ の解を算出する．連立 1 次方程式の数 $n = 10^3$ である $A^{(1)}x = y^{(1)}$ の $A^{(1)}$ に 1 から 99999 の乱数で定め，$y^{(1)}$ は各行の値 $y_i^{(1)} = i$ で定めた．$A^{(1)}x = y^{(1)}$ に対して $k\tau$SR 法を用いて解 x を算出する際，解 x の算出パターンは，$n = 10^3$ のとき，48362 パターンある．解 x を代入した $A^{(1)}x = y^{(1)}$ の左辺を $\overline{y}$ として，誤差範囲 ε を導入し，$y_i^{(1)} - \varepsilon \leq \overline{y}_i \leq y_i^{(1)} + \varepsilon$ が全ての $i = 1, 2, \ldots, n$ において満たされたら計算を打ち切る．$A^{(1)}$ の値を変え，10^4 回数値実験を行い，誤差範囲 ε 以内に収まる回数をカウントする．結果は，誤差範囲 $\varepsilon = 10^{-4}$ で 9921 回計算できた．

4　まとめと今後の課題

本研究では，$k\tau$SR 法によって，連立 1 次方程式 $A^{(\ell)}x = y^{(\ell)}$ に対して $\ell = 2, 3, 4$ の場合の SR しか施せなかったのが，$\ell = 5, 6, \ldots$ の場合の SR についても可能になった．加えて，ℓ を拡張した $\tau = 1, 2, \ldots, n-1$ を導入した連立 1 次方程式 $A^{(\tau)}x = y^{(\tau)}$ を任意の 2 以上の整数 k で $k\tau < n$ の範囲において $A^{(k\tau)}x = y^{(k\tau)}$ と変形できる事によって，SR の一般形を示した．また，$k\tau \geq n$ の範囲において $k\tau$SR 法を施して係数行列を対角化できることを示した．$k\tau$SR 法を施した連立 1 次方程式の解を算出する数値実験により解を算出できることを示し，その数値解から有用な結果が得られた．今後は，計算速度の改善が課題になる．解の算出パターンが複数あることから，並列計算機に向いていると考えられる．

[参考文献]

[1] D.J. Evans, Cyclic and stride reduction methods for generalised tridiagonal matrices, Int. J. Comp. Math., **73**, (2000), 487–492.