卒業論文要旨

スツルム-リウビル 4 階差分方程式に対する振動解析

(応用数学)　澤井 大基

1　はじめに

様々な離散的物理状況を解析する数理モデルの１つとして，スツルム-リウビル $2k$ 階差分方程式

$$\sum_{i=0}^{k}(-\Delta)^i[p_i(n)\Delta^i u(k+n-i)] = 0 \tag{1}$$

がある．ただし，k は正の整数，n は正の空間変数であり，$p_i(n)$ は境界条件のもとで予め定められた正の実数係数関数である．Δ は上方差分演算子であり，$\Delta u(n) = u(n+1)-u(n)$ とする．常微分方程式論において，微分方程式の固有関数および固有値の振る舞いを調べるのに適当なヒルベルト空間上のスペクトル法がある．その常微分方程式論の中心的な問題がスツルム-リウビル問題である．スツルム-リウビル問題はヴァイオリンの弦やドラムの調波の研究から生じた問題であり，自己随伴微分方程式を適切な境界条件の下で解く問題が，実数の固有値固有関数を求める問題に帰着されるというものである．差分化は微分方程式に対する近似手法の典型例であるが，差分化の視点からスツルム-リウビル問題に取り組むために，スツルム-リウビル差分方程式に対する研究が開始された．本研究では，スツルム-リウビル差分方程式に関する研究の 1 つとして，解 $u(n)$ の振動解析を行う．ここで，すべての正の整数 N に対して，$u(n)u(n+1)<0$ を満たすような $n \geq N$ が存在するならば，解 $u(n)$ は振動する，と定義する．差分方程式に対する振動解析は解の安定性や漸近挙動を理解する上で重要な解析の１つといえる．2 階のスツルム-リウビル差分方程式に対する振動解析理論を参考にし，本研究では 4 階の場合のスツルム-リウビル差分方程式に対する振動解析理論を明らかにする．

2　スツルム-リウビル 4 階差分方程式

スツルム-リウビル 4 階差分方程式は，(1) において $k=2$ の場合であり，

$$p_2(n+2)u(n+4)-a(n)u(n+3)+b(n)u(n+2)-a(n-1)u(n+1)+p_2(n)u(n) = 0 \tag{2}$$

で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} a(n) &= 2p_2(n+2)+2p_2(n+1)+p_1(n+1), \\ b(n) &= p_2(n+2)+p_1(n+1)+4p_2(n+1)+p_0(n)+p_1(n)+p_2(n) \end{aligned} \tag{3}$$

である．線形な 4 階差分方程式

$$q_0(n)u(n+4)+q_1(n)u(n+3)+q_2(n)u(n+2)+q_3(n)u(n+1)+q_4(n)u(n) = 0 \tag{4}$$

はスツルム-リウビル差分方程式に書き換えることができる．(4) の両辺ににある関数 $h(n)$ をかけ，(2) と係数比較して，$h(n)$ を定めると，以下の条件が得られる．

$$p_2(n) = \prod_{j=n_0}^{n-1}\frac{q_0(2j-n)}{q_4(2j-n+2)}\cdot q_4(n)$$

ただし，n_0 は正の整数とし，$h(n)$ の初項を $h(n_0) = q_0(2n_0-n)/q_4(2n_0-n+2)$ とする．同様の係数比較により，

$$\begin{aligned} p_1(n) &= h(n-1)q_1(n-1)+2(p_2(n)+p_2(n+1)), \\ p_0(n) &= h(n)q_2(n)-p_2(n+2)-p_1(n+1)-4p_2(n+1)-p_2(n)-p_1(n) \end{aligned} \tag{5}$$

となるので，$h(n)$, $p_2(n)$ により $p_1(n)$, $p_0(n)$ の順に与えることができる．

3　振動解析に関する定理

スツルム-リウビル 4 階差分方程式 (2) の解 $u(n)$ を振動解析の定理を導くために，新たな変数

$$v_1(n) = \frac{b(n+1)u(n+3)}{a(n)u(n+2)},$$
$$v_2(n) = -\frac{b(n+2)u(n+4)}{p_2(n+2)u(n+2)} \tag{6}$$

を導入する．このとき，(2) より $v_1(n)$, $v_2(n)$ は

$$c_1(n)v_1(n) + c_2(n)v_2(n) + \frac{1}{v_1(n-1)} + \frac{1}{v_2(n-2)} = 1 \tag{7}$$

を満たす．ただし

$$c_1(n) = \frac{(a(n))^2}{b(n)b(n+1)},$$
$$c_2(n) = \frac{(p_2(n+2))^2}{b(n)b(n+2)} \tag{8}$$

である．(2) の 2 階差分方程式に対する振動解析定理を参考にすると以下の定理が導かれる．

定理 1　ある正の数 ε が存在し，すべての $n \geq N$ において $b(n)b(n+1) \leq (4-\varepsilon)a^2(n)$ または，$b(n)b(n+2) \leq (4-\varepsilon){p_2}^2(n+2)$ を満たすとすると，(2) のすべての解 $u(n)$ は振動する．

定理 3.1 より以下の定理が得られる．

定理 2　$n \geq N$ において $b(n)b(n+1) \geq 4a^2(n)$ または $b(n)b(n+2) \geq 4{p_2}^2(n)$ を満たすとしても，(2) は非振動解になるとは限らない．

定理 2 において，2 階差分方程式のときは解が非振動である結果が得られたが，4 階差分方程式のときは振動する場合もあるという結果となり，2 階差分方程式とは異なる結果が得られた．

4　まとめと今後の課題

本研究では，どんな条件を与えたときに (2) の解が振動するか，あるいは振動しないのかを研究することにより，スツルム-リウビル 4 階差分方程式の解に対する振動理論を明らかにした．今後は $k = 1,\ 2$ の場合だけでなく $2k$ 階差分方程式の一般形において，振動理論を明らかにしたい．

[参考文献]

[1] W.O. Amrein, A.M. Hinz, and D.P. Pearson, *Sturm-Liouville Theory*, Birkhauser Basel, online, 2005.

[2] S.Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, 2005.

[3] P.Hasil, Conjugacy of Self-Adjoint Difference Equations of Even Order, Abstr. Appl. Anal. , **2011**, (2011), 814962.