卒業論文要旨

Casorati 行列式に対する新しい漸近展開定理

(応用数学)　新庄 雅斗

1　はじめに

電流電圧方程式として知られた離散戸田方程式や生物の捕食関係を記述した離散ロトカ・ボルテラ (dLV) 方程式の解は対称な m 次正方行列の行列式である Hankel 行列式

$$H_0^{(n)} := 1, \quad H_m^{(n)} := \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+m-1} & a_{n+m} & \cdots & a_{n+2m-2} \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

を使って表現できる [3]．ここで，n は時間変数，m は空間的な変数に対応する．Hankel 行列式 $H_m^{(n)}$ に関連する形式的ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $z = 0$ において解析的とする．このとき，領域 $D = \{z||z| < \sigma\}$ 内で $f(z)$ の極 u_i^{-1} が $0 < |u_1^{-1}| < |u_2^{-1}| < \cdots < \sigma$ を満たすならば，$n \to \infty$ とすると，$|u_n| > \rho > |u_{n+1}|$ なる ρ に対して

$$H_m^{(n)} = c_m (u_1 u_2 \cdots u_m)^n \left(1 + O\left(\left(\frac{\rho}{|u_n|}\right)^n\right)\right) \tag{2}$$

のような n に依存しない定数 $c_m \neq 0$ が存在する [1]. Hankel 行列式の $n \to \infty$ における漸近展開 (2) を利用すると，離散戸田方程式や dLV 方程式の $n \to \infty$ における漸近解析が可能となる．

本研究では，まず，時間変数 n を上付きとして区別した $a_k^{(n)}$ を係数とする形式ベキ級数 $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^n$ を考え，関連づけられる m 次正方行列の行列式

$$G_{l,0}^{(n)} := 1, \quad G_{l,m}^{(n)} := \begin{vmatrix} a_l^{(n)} & a_{l+1}^{(n)} & \cdots & a_{l+m-1}^{(n)} \\ a_{l+2}^{(n)} & a_{l+3}^{(n)} & \cdots & a_{l+m+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l+2(m-1)}^{(n)} & a_{l+2(m-1)+1}^{(n)} & \cdots & a_{l+3(m-1)}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

がある条件の下では n に関する Casorati 行列式に変形できることを示す．続いて，[2] の Hankel 行列式に対する解析手法に倣って，$f_k(z)$ の極を用いた Casorati 行列式の $n \to \infty$ における漸近展開定理を与える．最後に，得られた定理を利用して，dLV 方程式の拡張である離散ハングリーロトカ・ボルテラ (dhLV) 方程式 [4] の漸近挙動を明らかにする．

2　漸近展開定理と dhLV 変数の収束性

行列式 $G_{l,m}^{(n)}$ の成分である $a_k^{(n)}$ が離散パラメータを $\delta^{(n+1)}$ を含む関係式

$$a_k^{(n+1)} = a_{k+2}^{(n)} - (\delta^{(n+1)})^3 a_k^{(n)} \tag{4}$$

を満たすならば，$G_{l,m}^{(n)}$ は Casorati 行列式に変形できる．また，$a_k^{(n)}$ は $|r_{i,k}| > |r_{i+1,k}|$ を満たす $f_k(z)$ の極 $r_{i,k}^{-1}$ と任意定数 $c_{i,k}$ によって

$$a_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} c_{i,k} r_{i,k}^n \tag{5}$$

と書ける．さらに，(4), (5) より $r_{i,k} = r_{i,k+2}$ を示すことができ，以下の定理が得られる．

定理 1 $G_{l,m}^{(n)}$ に関連する形式的ベキ級数 $f_k(z)$ が解析的とし，$p=(m+1)/2$，$q=m/2$ と置く．このとき，領域 $D=\{z||z|<\sigma\}$ 内で $f_k(z)$ の極 $r_{i,l}^{-1}$ が $0<|r_1^{-1}|<|r_2^{-1}|<\cdots<\sigma$ を満たすならば，$n\to\infty$ のとき

$$G_{l,m}^{(n)}=\begin{cases} C_{l,m}\prod_{i=1}^{p} r_{i,l}^{n}\prod_{i=1}^{p-1} r_{i,l+1}^{n}(1+\rho_{l,m}^{(n)}) & (m=\mathrm{odd}), \\ C_{l,m}\prod_{i=1}^{q} r_{i,l}^{n} r_{i,l+1}^{n}(1+\bar{\rho}_{l,m}^{(n)}) & (m=\mathrm{even}) \end{cases} \tag{6}$$

のような n に依存しない定数 $C_{l,m}\neq 0$ が存在する．ただし，$\lim_{n\to\infty}\rho_{l,m}^{(n)}=0, \lim_{n\to\infty}\bar{\rho}_{l,m}^{(n)}=0$ である．

離散時間 n における k 番目の生物の個体数を $u_k^{(n)}$ としたハングリー度数 $M=2$ の dhLV 方程式は

$$\frac{u_k^{(n+1)}}{u_k^{(n)}}=\frac{(\delta^{(n+1)}+u_{k+1}^{(n)})(\delta^{(n+1)}+u_{k+2}^{(n)})}{(\delta^{(n+2)}+u_{k-1}^{(t+1)})(\delta^{(n+2)}+u_{k-2}^{(n+1)})} \tag{7}$$

のように表される [4]．dhLV 変数 $u_k^{(n)}$ は (4) を満たす $a_k^{(n)}$ を成分とした $G_{l,m}^{(n)}$ によって表現されるので，定理 1 を利用することができ，$u_k^{(n)}$ の $n\to\infty$ における漸近挙動について以下の定理が得られる．

定理 2 $n\to\infty$ のとき，$\delta^{(n)}$ が定数に収束するならば，$u_{3m-2}^{(n)}$ はある正の定数に，$u_{3m-1}^{(n)}, u_{3m}^{(n)}$ は 0 に収束する．

3 まとめと今後の課題

本研究では，形式的ベキ級数 $f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_k^{(n)}z^n$ に関連する行列式がある条件の下で Casorati 行列式へ変形できることを示し，$f_k(z)$ の極を用いた Casorati 行列式の漸近展開表現として定理 1 を得た．また，定理 1 を利用して，dhLV 変数 $u_k^{(n)}$ の漸近挙動について定理 2 を導いた．

今後は，ハングリー度数 M が任意の場合の dhLV 変数の漸近挙動について議論する．また，Casorati 行列式によって解が表現できる他の可積分系についても離散時間 $n\to\infty$ においてどのような振る舞いをするのか調べたい．

[参考文献]

[1] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis Vol.1*, Wiley, New York, 1988, 591–608.

[2] M. Iwasaki and Y. Nakamura, On the convergence of a solution of the discrete Lotka-Volterra system, Inverse Problems, **18**, (2002), 1569–1578.

[3] Y. Nakamura ed., *Applied Integrable Systems (in Japanese)*, Shokabo, Tokyo, 2000.

[4] S. Tsujimoto and K. Kondo, Molecule solutions to discrete equations and orthogonal polynomials, Surikaisekikenkyusho Kokyuroku, **1170**, (2000), 1–8.