卒業論文要旨

4面体の組合せによる空間充填

(応用数学)　魚住 拓摩

1　はじめに

有限種類の平面図形をある平面領域に隙間なく並べる平面充填は，芸術，生物，建築物等，様々な分野に応用されている．なかでもペンローズ充填 [1] が有名であり，例えば，中世イスラム建築であるギリーの外壁模様はペンローズ充填と解釈できる [2].

一方，有限種類の立体図形をある空間領域に隙間なく埋める操作は空間充填と呼ばれる．ペンタドロンと呼ばれる 5 面体による空間充填が報告されているが，それ以外の 1 種類の立体図形による空間充填の話題は見あたらない．本研究では，辺と面および頂点の数が最小の立体である 4 面体による空間充填について調べ，いくつかは 1 枚の紙から折り紙的な手法によって実現できることを示す.

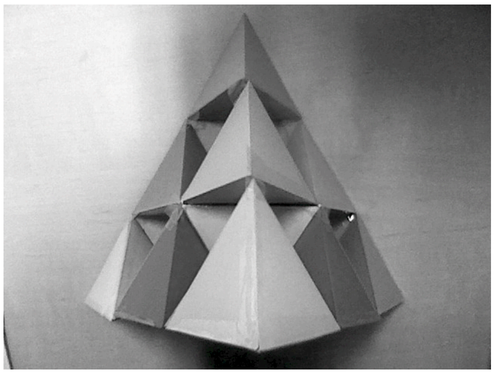
2　2 種類の 4 面体による空間充填

各面が合同な正 3 角形もしくは正 5 角形で，各頂点に集まる面の数がすべて等しい凸多面体を正多面体という．正多面体は，正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体の 5 種類のみである．なかでも正 4 面体は辺と面および頂点の数が最も少なく，どの頂点も残りの 3 つの頂点と結ばれることは他の正多面体には見られない特徴である.

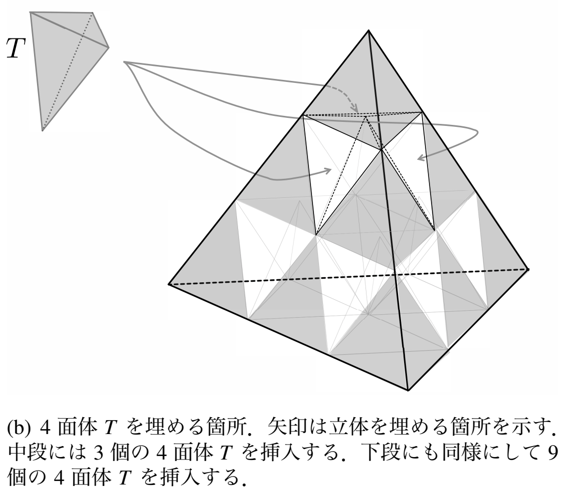
正 4 面体のみの組合せで空間充填できないことは 10 面体を作成できないことから証明できる.

正 4 面体に加えて，もう 1 種類の 4 面体 T との組合せによる空間充填を考える．15 個の正 4 面体がある場合，平面 α 上の正 3 角形領域に 9 個の正 4 面体を隙間なく配置する．続いて，配置した正 4 面体の平面 α 上にない頂点を含む平面 β を考える．平面 β 上の頂点を結んでできる最大の正 3 角形上領域に隙間なく 5 個の正 4 面体を配置する．最後は，平面 α, β 上にない頂点を含む平面 γ を考える．平面 γ 上の頂点を結んでできる最大の正 3 角形領域に正 4 面体を 1 個配置する．以上の操作から得られた立体は，図 1(a) のようになる.

正 4 面体の 1 辺の長さを a とする．正 4 面体のすきまを埋める立体は，1 辺の長さが $a/2$，その他の辺を $3a/2$ とする 2 等辺 3 角形を底面とし，高さが $\sqrt{6}a/3$ の 4 面体 T である．この 4 面体 T を適当な個数すきまに埋めることで，より大きな正 4 面体が作成できる．図 1 の場合，12 個の 4 面体 T を用いると空間充填できる.

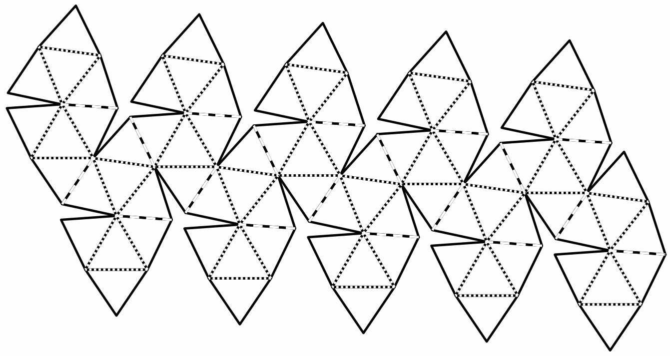


(a) 15 個の正 4 面体を規則に従って組合せた立体.

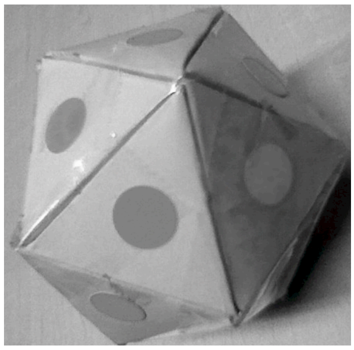


(b) 4 面体 T を埋める箇所．矢印は立体を埋める箇所を示す．中段には 3 個の 4 面体 T を挿入する．下段にも同様にして 9 個の 4 面体 T を挿入する.

図 1: 正 4 面体と 4 面体 T から，より大きな正 4 面体ができる空間充填.



(a) 折り紙的手法を用いると正 20 面体ができる 1 枚の紙．ただし，点線は谷折り，破線は山折りを示す．



(b) 完成図．

図 2: 4 面体の組合せによる正 20 面体．

3　4 面体組合せによる正 20 面体

ある面の正 3 角形の 1 辺の長さを a，残りの辺の長さを $a\sqrt{1+\tau^2}/2$ とする 4 面体 U による空間充填を考える．ただし，$\tau=(1+\sqrt{5})/2$ は黄金比である．黄金比は 2 次方程式 $x^2+x-1=0$ の実数解であり，自然界に多く現れる，美しく調和のとれた比として有名である．ここで，3 つの合同な黄金長方形が，互いに直交し，かつ，それらの中心が一致するように配置すると，黄金長方形の頂点は正 20 面体の頂点と完全に一致することに注意したい [1]．黄金長方形とは，縦と横の辺の長さが $1:\tau$ となる長方形のことである．黄金長方形と正 20 面体の関係から 4 面体 U の辺の長さが $a\sqrt{1+\tau^2}/2$ が定まり，4 面体 U による空間充填について，次の定理が得られる．

定理 1　4 面体 U の空間充填によって正 20 面体が作成できる．また，図 2 のような高々1 枚の紙から折り紙的な手法で正 20 面体が作成できる．

4 面体の組合せによる正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体の作成については発表時に述べる．

4　まとめと今後の課題

本研究では，まず正 4 面体のみを用いて空間充填ができないことを証明した．続いて，正 4 面体と 1 種類の正 4 面体の組合せで，空間充填できることを示した．さらに，4 面体の組合せによる空間充填で正多面体が作成できることを示し，これらの空間充填が高々1 枚の紙から作成できることを明らかにした．

今後は，正 4 面体と 1 種類の 4 面体の組合せによる他の空間充填方法がないか議論したい．また，どのような多面体を用いると，空間充填による立体が正多面体になり，かつ，それらの空間充填が高々1 枚の紙で実現できるのかを調べたい．

[参考文献]

[1] R.A. Dunlap，岩永恭雄，松井講介，黄金比とフィボナッチ数，日本評論社，2003.

[2] P.J. Lu and P.J. Steinhardt, Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval islamic architecture, Science, **315** (2007), 1106–1110.