卒業論文要旨

行列対角化のための dLVs 反復の収束定理

(応用数学)　植田　旭

1 はじめに

離散ロトカ・ボルテラ (discrete Lotka-Volterra) 系はもともと生物の捕食-被食関係を捉えた離散力学系として有名であるが，dLV 系を構成する dLV 写像の反復は実対称 3 重対角行列を対角化できる [1]．実対称 3 重対角行列の相似変形を与える写像は上 2 重対角行列の特異値も変化させないため，dLV 反復で上 2 重対角行列の特異値が求められる．ハウスホルダ変換を用いるといかなる長方行列も特異値を保ちながら上 2 重対角化できるため，dLV 反復に基づく dLV アルゴリズムは汎用性の高いアルゴリズムといえる．dLV アルゴリズムの収束を加速させるため dLV 反復に原点シフトを導入した mdLVs (modified dLV with shift) 反復 [1] と dLVs (dLV with shift) 反復 [2] が提案されている．mdLVs 反復に対しては様々な研究が進み，dLV アルゴリズムよりも実用的な mdLVs アルゴリズムが定式化されている．一方，dLVs 反復は mdLVs 反復と比べて提案されたのが比較的最近であるため，dLVs 反復に対する研究成果は皆無である．本研究では dLVs 反復における固有値および特異値への収束性について明らかにする．

2 対称 3 重対角行列に対する dLVs 反復

dLVs 写像は $(2m-1)$ 個の漸化式

$$\begin{cases} v_{2k-1}^{(n+1)}(1+\delta^{(n+1)}v_{2k-2}^{(n+1)}) = \dfrac{1}{\delta^{(n)}}(1+\delta^{(n)}v_{2k-1}^{(n)})(1+\delta^{(n)}v_{2k}^{(n)}), \quad k=1,2,\dots,m, \\ v_{2k}^{(n+1)}(1+\delta^{(n+1)}v_{2k-1}^{(n+1)}) = \delta^{(n)}v_{2k}^{(n)}v_{2k+1}^{(n)}, \quad k=1,2,\dots,m-1, \\ v_0^{(n)} := 0, \quad v_{2m}^{(n)} := 0 \end{cases}$$

で定められる写像 $\{v_1^{(n)},\ v_2^{(n)},\dots,\ v_{2m-1}^{(n)}\} \to \{v_1^{(n+1)}, v_2^{(n+1)},\dots,\ v_{2m-1}^{(n+1)}\}$ である．n は反復回数であり $v_1^{(n)}, v_2^{(n)},\dots,\ v_{2m-1}^{(n)}$ および $\delta^{(n)}$ はそれぞれ反復回数 n における $v_1, v_2,\dots,\ v_{2m-1}$ および δ の値を表す．$w_k^{(0)} := v_k^{(0)}(1+\delta^{(0)}v_{k-1}^{(0)})$ が成分に現れる上 2 重対角行列

$$B^{(0)} := \begin{pmatrix} \sqrt{w_1^{(0)}} & \sqrt{w_2^{(0)}} & & & \\ & \sqrt{w_3^{(0)}} & \ddots & & \\ & & \ddots & \sqrt{w_{2m-2}^{(0)}} \\ \text{\huge 0} & & & \sqrt{w_{2m-1}^{(0)}} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

に対して dLVs 反復の初期値を $v_k^{(0)} = b_k^2/(1+\delta^{(0)}v_{k-1}^{(0)})$ のように定めると，$B^{(0)}$ の上付き添字 0 を n に置き換えた上 2 重対角行列 $B^{(n)}$ に対して

$$(B^{(n)})^\top B^{(n)} = (B^{(0)})^\top B^{(0)} + \sum_{N=1}^{n} \frac{1}{\delta^{(N)}}$$

が成り立つ．これは dLVs 反復で得られる $(B^{(n)})^\top B^{(n)}$ の固有値 $\lambda_k((B^{(n)})^\top B^{(n)})$ に対して $\lambda_k((B^{(n)})^\top B^{(n)}) = \lambda_k((B^{(0)})^\top B^{(0)}) + \sum_{N=1}^{n} 1/\delta^{(N)}$ が成り立つことを意味する．ただし，$\lambda_1(\cdot) \geq \lambda_2(\cdot) \geq \cdots \geq \lambda_m(\cdot)$ である．$\delta^{(n)}$ は $B^{(n)}$ の成分と無関係に定められる任意のパラメーターであることに注意したい．

3 dLVs 反復の漸近解析

$n \to \infty$ における dLVs 反復の漸近挙動を調べるために，補助変数

$$\begin{aligned} u_{2k-1}^{(n)} &:= \frac{1}{\delta^{(n)}}(1+\delta^{(n)}v_{2k-2}^{(n)})(1+\delta^{(n)}v_{2k-1}^{(n)}), \\ u_{2k}^{(n)} &:= \delta^{(n)}v_{2k-1}^{(n)}v_{2k}^{(n)}, \\ \bar{v}_k^{(n)} &:= \frac{u_k^{(n)}}{1-\delta^{(n)}\bar{v}_{k-1}^{(n)}} \end{aligned}$$

を導入する．$w_k^{(0)} > 0$ のとき $\delta^{(n)}$ の値に制約を加えると，dLVs 変数および補助変数の正負について以下の命題が得られる．

命題 1 $w_k^{(0)} > 0$ のとき $\delta^{(n)} < 0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1/\delta^{(n)}\right) < \lambda_m((B^{(0)})^\top B^{(n)})$ ならば

$$\begin{aligned} &u_k^{(n)}, \bar{v}_k^{(n)}, w_k^{(n)} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m-1, \\ &v_{2k-1}^{(n)} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \\ &v_{2k}^{(n)} < 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

命題 1 を踏まえると $w_k^{(n)}$ と $w_k^{(0)}$ を結ぶ以下の補題が得られる．

補題 2 $w_k^{(0)} > 0$ のとき $\delta^{(n)} < 0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1/\delta^{(n)}\right) < \lambda_m\left((B^{(0)})^\top B^{(0)}\right)$ ならば

$$w_k^{(n)} = \left(\prod_{N=0}^{n-1} \frac{1}{\gamma_k^{(N)}} \frac{1-\delta^{(N)}\bar{v}_{k+1}^{(N)}}{1-\delta^{(N)}\bar{v}_{k-1}^{(N)}}\right) w_k^{(0)}.$$

ただし，k が奇数のとき $\gamma_k^{(n)} \geq 1$，k が偶数のとき $0 < \gamma_k^{(n)} \leq 1$ である．

単調増加性と単調減少性が補題 2 から読み取れ，これと $w_k^{(n)}$ の有界性を併せると以下の命題が導かれる．

命題 3 $w_k^{(0)} > 0$ のとき $\delta^{(n)} < 0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1/\delta^{(n)}\right) < \lambda_m\left((B^{(0)})^\top B^{(0)}\right)$ ならば

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} w_{2k-1}^{(n)} &= c_k, \\ \lim_{n\to\infty} w_{2k}^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

ただし，c_k は $c_1 > c_2 > \cdots > c_m > 0$ をみたす定数である．

命題 1 と $\lambda_k((B^{(n)})^\top B^{(n)}) = \lambda_k((B^{(0)})^\top B) + \sum_{N=1}^{n} 1/\delta^{(N)}$ を併せると本研究の主定理が導かれる．

定理 4 $w_k^{(0)} > 0$ のとき $\delta^{(n)} < 0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1/\delta^{(n)}) < \lambda_m\left((B^{(0)})^\top B^{(0)}\right)$ ならば

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} w_{2k-1}^{(n)} = \lambda_k\left((B^{(0)})^\top B^{(0)}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta^{(n)}} = \sigma_k^2(B^{(0)}) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta^{(n)}}, \\ &\lim_{n\to\infty} w_{2k}^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

ただし，$\sigma_k(B^{(0)})$ は $B^{(0)}$ の特異値である．

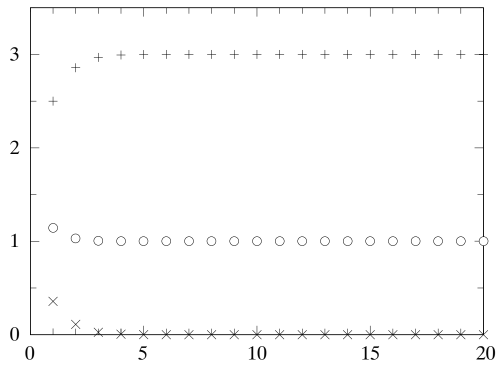

図 1: dLVs 変数の収束履歴．横軸は反復回数 n，縦軸は $w_k^{(n)}$ の値を表す．$+$：$w_1^{(n)} - \sum_{N=0}^{n} 1/\delta^{(N)}$ の値，$\times$: $w_2^{(n)}$ の値，$\circ$: $w_3^{(n)} - \sum_{N=0}^{n} 1/\delta^{(N)}$ の値．

図 1 は $m = 2, w_1^{(0)} = 2, w_2^{(0)} = 0.5, w_3^{(0)} = 1.5$ として dLVs 反復を実行した際の $w_1^{(n)} - \sum_{N=0}^{n} 1/\delta^{(N)}$，$w_2^{(n)}$，$w_3^{(n)} - \sum_{N=0}^{n} 1/\delta^{(N)}$ の値をプロットしたグラフである．ただし，$1/\delta^{(0)} = -0.4$ として，$n = 1, 2, \ldots$ に対して $1/\delta^{(n)} = (1 + \sum_{N=0}^{n-1} 1/\delta^{(N)}) \times 0.1$ と定める．定理 3 で示したように n の値が大きくなるにつれて $w_1^{(n)} - \sum_{N=0}^{n} 1/\delta^{(N)}$ の値は $\lambda_1((B^{(0)})^\top B^{(0)}) = 3$ に，$w_3^{(n)} - \sum_{N=0}^{n} 1/\delta^{(N)}$ の値は $\lambda_2((B^{(0)})^\top B^{(0)}) = 1$ に, $w_2^{(n)}$ の値は 0 に近くことが確認できる．

4 まとめと今後の展望

本研究では dLVs 反復における実対称 3 重対角行列の固有値への漸近収束性を明らかにした．この研究成果から dLVs 反復に基づいた実対称 3 重対角行列の固有値計算アルゴリズム，さらには上 2 重対角行列の特異値計算アルゴリズムの定式化が期待できる．今後は，パラメータ $\delta^{(n)}$ に制約を加えない場合の漸近収束性について検討したい．また，dLVs 反復の超離散版が対応付けられるセルオートマトンモデルについても考察したい．

参考文献

[1] 中村佳正: 可積分系の機能数理, 共立出版, 2006

[2] 中村佳正: 可積分系の数理, 朝倉書店, 2018